Pour enseigner ...

Le guide CP

http://ien-epinay.circo.ac-creteil.fr/spip.php?page=article&id_article=1325

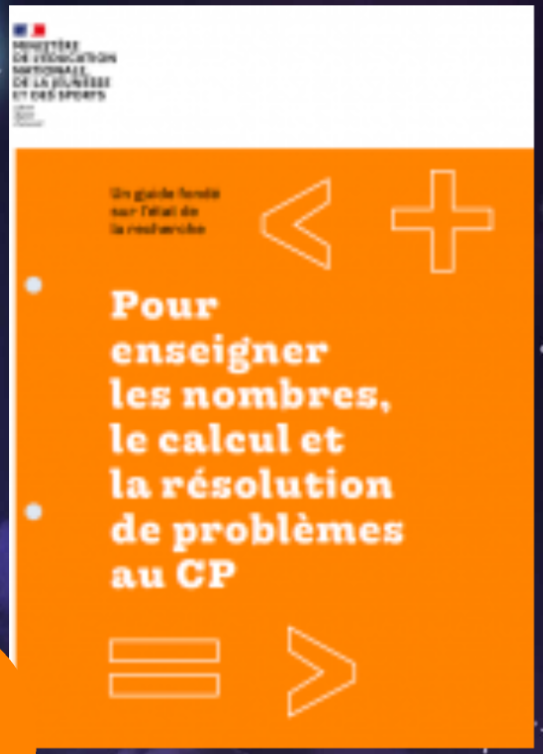
III

Résolution de problèmes et modélisation

les programmes placent « **la résolution de problèmes au centre de l'activité mathématique des élèves** » et précisent que « les problèmes permettent d'aborder de nouvelles notions, de consolider des acquisitions, de provoquer des questionnements ».

mettre en place un enseignement construit pour développer l'aptitude des élèves à résoudre des problèmes.

en résumé



IEN Epinay - 2020 - JCR

III Résolution de problèmes et modélisation

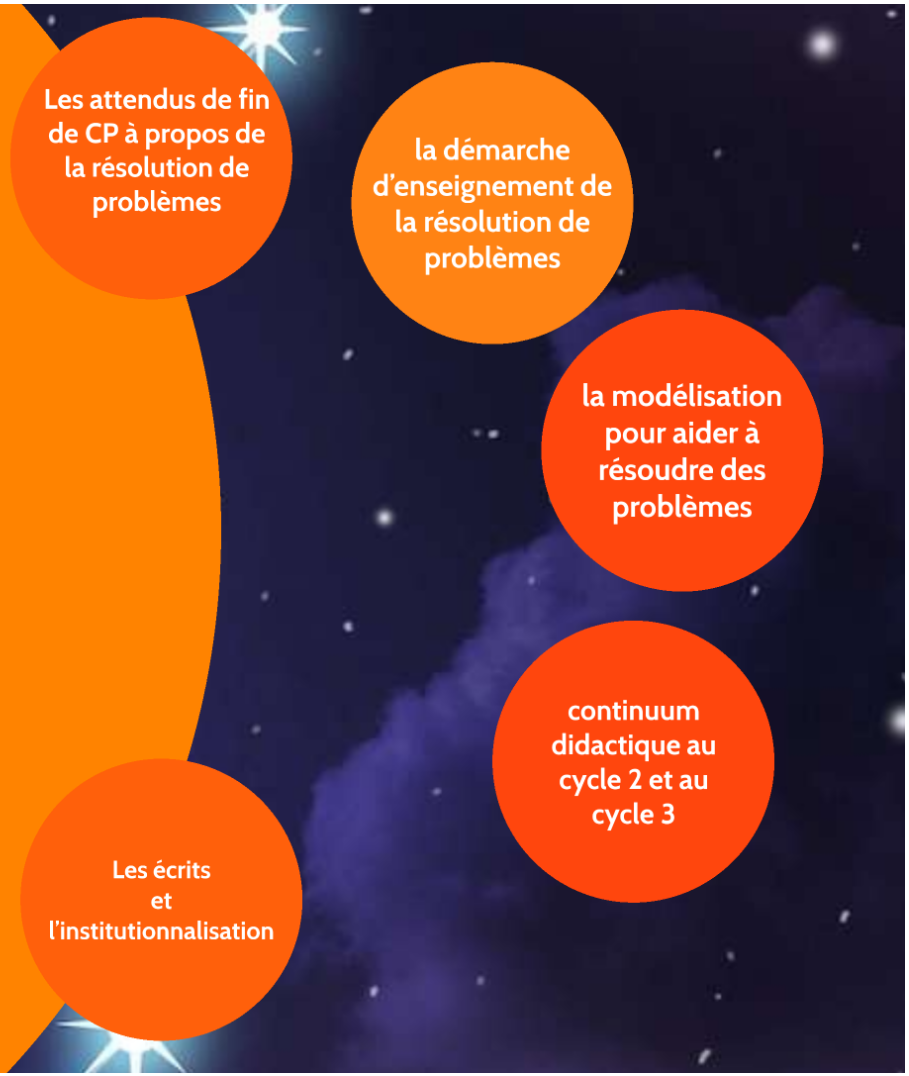
un **travail structuré et régulier** pour faire acquérir aux élèves les connaissances et les compétences leur permettant de :

— **comprendre** le problème posé ;

— établir une **stratégie** pour le résoudre (en faisant par exemple des **analogies** avec un **modèle** connu, en décomposant ou recomposant le **problème en sous-problèmes**, en s'appuyant éventuellement sur des **outils** auxiliaires, par exemple un **schéma** ou un **tableau**, en faisant des **essais**, en partant de **ce que l'on veut trouver**) ;

— **mettre en œuvre la stratégie** retenue ;

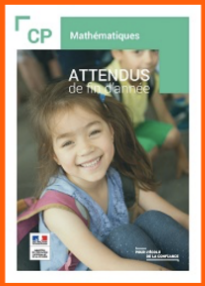
— **revenir sur la solution** et prendre du recul sur leur travail.



Les attendus en CP

Les attendus de fin d'année de CP fixent ce que les élèves doivent savoir faire et constituent des éléments pour envisager la progressivité des apprentissages

CP



CHAMP ADDITIF	CHAMP MULTIPLICATIF
– Résoudre des problèmes additifs et soustractifs en une ou deux étapes ; – Modéliser ces problèmes à l'aide de schémas ou d'écritures mathématiques ; – Connaître le sens des signes « + » et « – ».	– Résoudre des problèmes de multiplication ou de division, en une étape, sur des petits nombres, avec le recours à la manipulation.

Les **problèmes arithmétiques élémentaires et complexes** forment l'essentiel du travail de résolution de problèmes à l'école élémentaire.

III Résolution de problèmes et modélisation

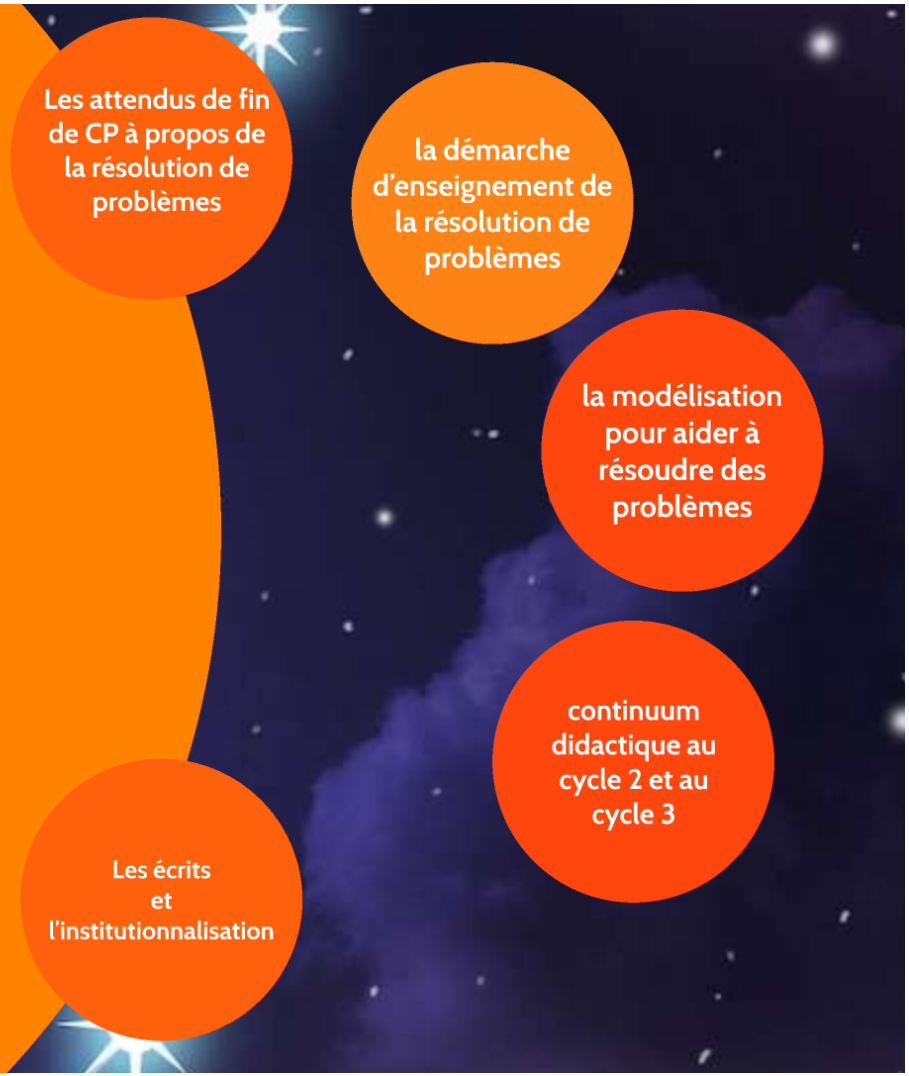
un **travail structuré et régulier** pour faire acquérir aux élèves les connaissances et les compétences leur permettant de :

— **comprendre** le problème posé ;

— établir une **stratégie** pour le résoudre (en faisant par exemple des **analogies** avec un **modèle** connu, en décomposant ou recomposant le **problème en sous-problèmes**, en s'appuyant éventuellement sur des **outils** auxiliaires, par exemple un **schéma** ou un **tableau**, en faisant des **essais**, en partant de **ce que l'on veut trouver**) ;

— **mettre en œuvre la stratégie** retenue ;

— **revenir sur la solution** et prendre du recul sur leur travail.

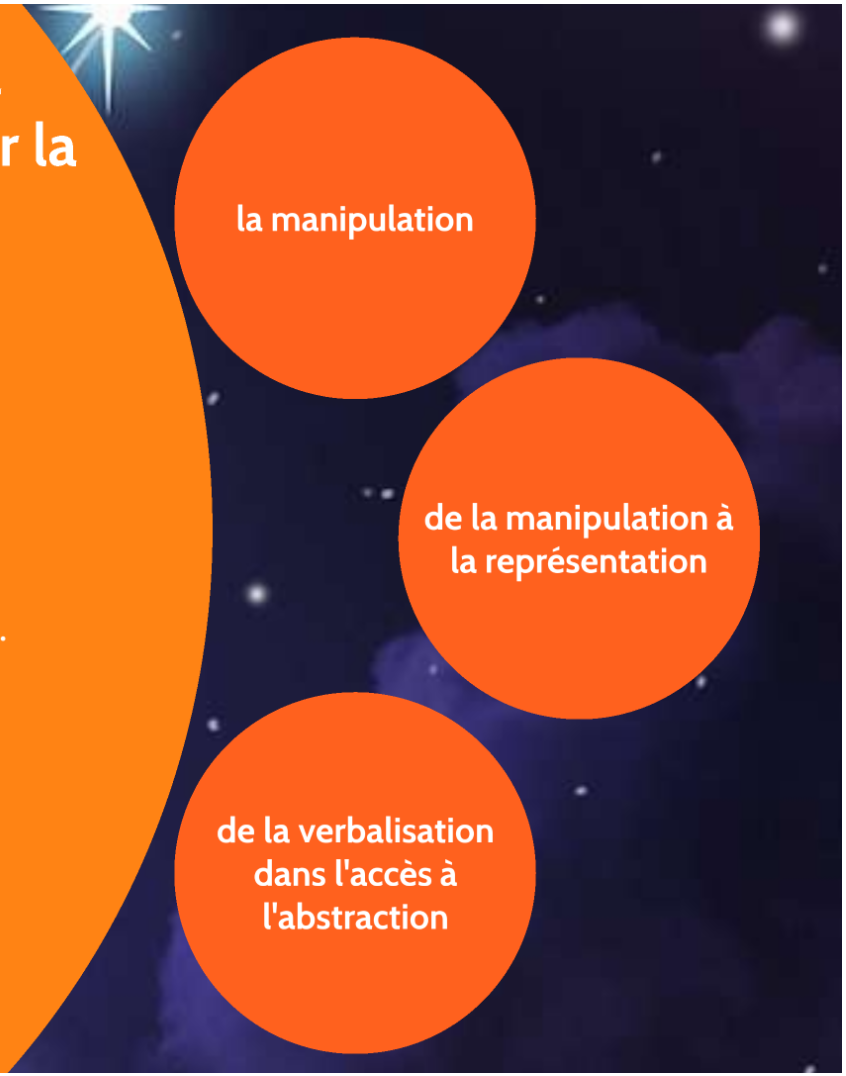


Vers l’abstraction : de la manipulation à la représentation symbolique en passant par la verbalisation

trois étapes concomitantes essentielles,

la manipulation,
la représentation
et la verbalisation,

qui permettent le passage progressif **vers l’abstraction**.



LA MANIPULATION

La manipulation n'est donc pas une finalité mais **une étape intermédiaire** permettant d'engager un travail cognitif.

Le matériel change progressivement de statut ; de **matériel pour constater, observer**, il devient **matériel pour valider ce qu'on est capable d'anticiper**.
Il permet de **raisonner sur les procédures.**

la manipulation permet à l'élève de s'approprier la situation, de s'en faire une première représentation. Mais cette première phase n'est pas suffisante : cette étape doit également **conduire à une anticipation d'une solution** au problème.

MANIPULATION PASSIVE ET MANIPULATION ACTIVE :

EXEMPLE AVEC LA SITUATION DE LA BOÎTE[37]

Manipulation passive : le professeur dispose **A** jetons dans la boîte, puis **B** jetons et pose la question du nombre total de jetons dans la boîte. Les élèves ont accès au contenu de la boîte et peuvent se contenter de lire le résultat en recomptant les jetons.

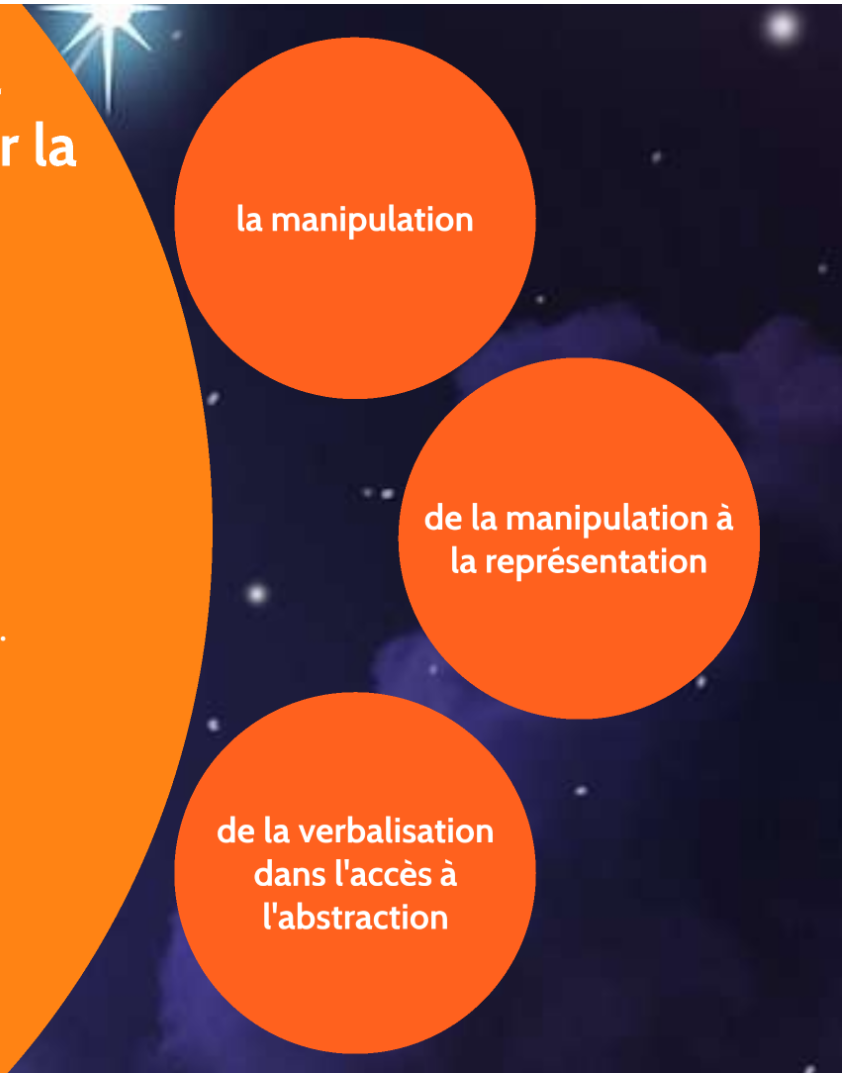
Manipulation active : le professeur montre successivement les deux collections de jetons et les place dans la boîte, la referme et pose la question. Dans ce cas, l'élève va mobiliser des représentations mentales et ses connaissances sur les nombres, ainsi que des procédures de plus haut niveau pour résoudre le problème.

Vers l’abstraction : de la manipulation à la représentation symbolique en passant par la verbalisation

trois étapes concomitantes essentielles,

la manipulation,
la représentation
et la verbalisation,

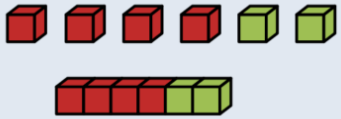
qui permettent le passage progressif **vers l’abstraction**.



DE LA MANIPULATION À LA REPRÉSENTATION SYMBOLIQUE

Afin de préparer les élèves de maternelle à accéder à ces représentations, le matériel tangible devra être progressivement remplacé par des objets manipulables moins figuratifs, comme des cubes emboîtables

L'écriture mathématique, qui traduit de manière symbolique la situation rencontrée, s'introduit progressivement

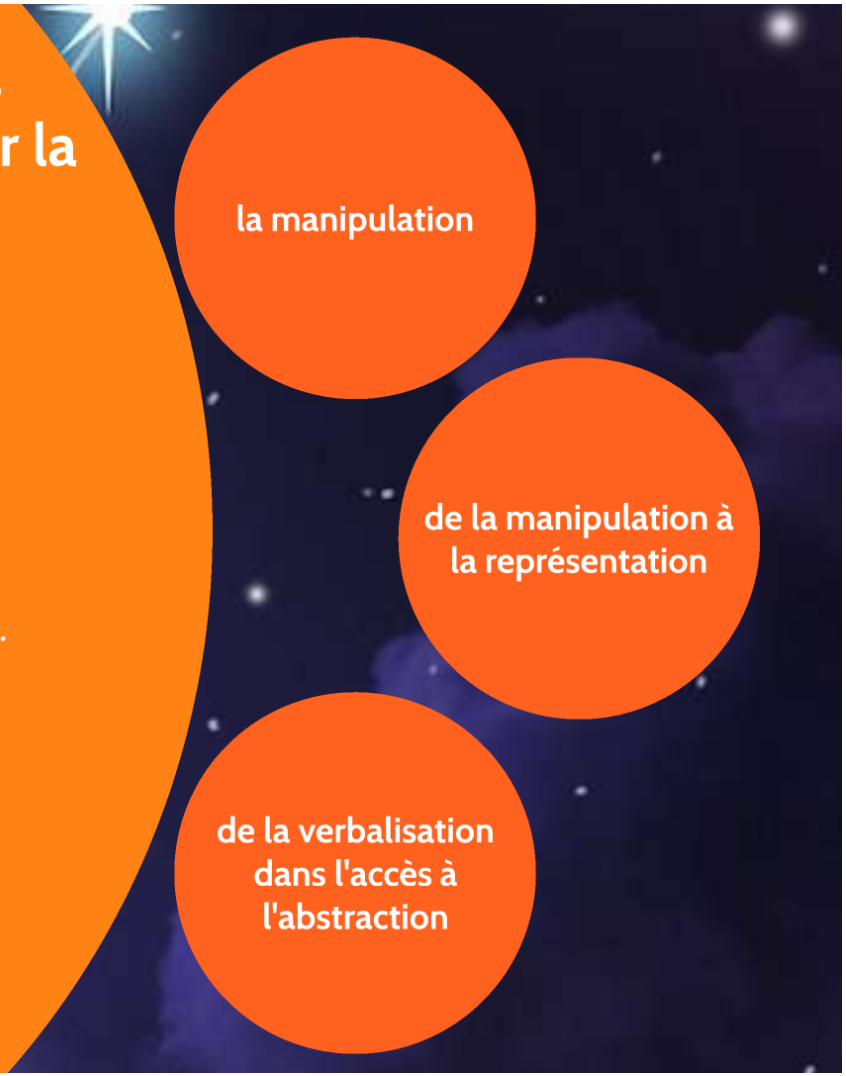
MODE SENSORI-MOTEUR[38]	**Manipulation d'objets tangibles proches de la réalité :**	**Manipulation d'objets tangibles figuratifs :** 
MODE IMAGÉ	**Représentations imagées des objets tangibles proches de la réalité :**	• **Représentation avec un schéma :** • **Représentation présymbolique (schéma en barres + écriture symbolique) :**
MODE SYMBOLIQUE	**Écriture en langage mathématique :** 4 + 2 = 6	

Vers l’abstraction : de la manipulation à la représentation symbolique en passant par la verbalisation

trois étapes concomitantes essentielles,

la manipulation,
la représentation
et la verbalisation,

qui permettent le passage progressif **vers l’abstraction**.



LA PLACE DE LA VERBALISATION DANS L'ACCÈS À L'ABSTRACTION

La verbalisation permet de mettre en mots et d'expliciter l'action, sans la produire ou la représenter visuellement.

Du point de vue du professeur

verbaliser les étapes de la démarche et ses propres **procédures** en passant par des exemples/contre-exemples et des **analogies** avec des situations déjà rencontrées.

des **liens** explicites avec les **connaissances** et compétences à mobiliser pour résoudre le problème (en calcul mental, ordre de grandeurs, procédure connue, etc.).

formuler et reformuler le langage mathématique précis (sens des symboles et lexique spécifique) en action,

Du point de vue de l'élève

permettre d'opérer **un retour réflexif sur son propre raisonnement** et de ne pas rester au stade de la simple manipulation : **prendre conscience de ses propres stratégies** ;

permet de **préciser l'argumentation pour la rendre compréhensible** par les autres, de **comparer ses propres stratégies** avec celles des camarades, et de travailler à l'émergence d'un référentiel de savoir commun ;

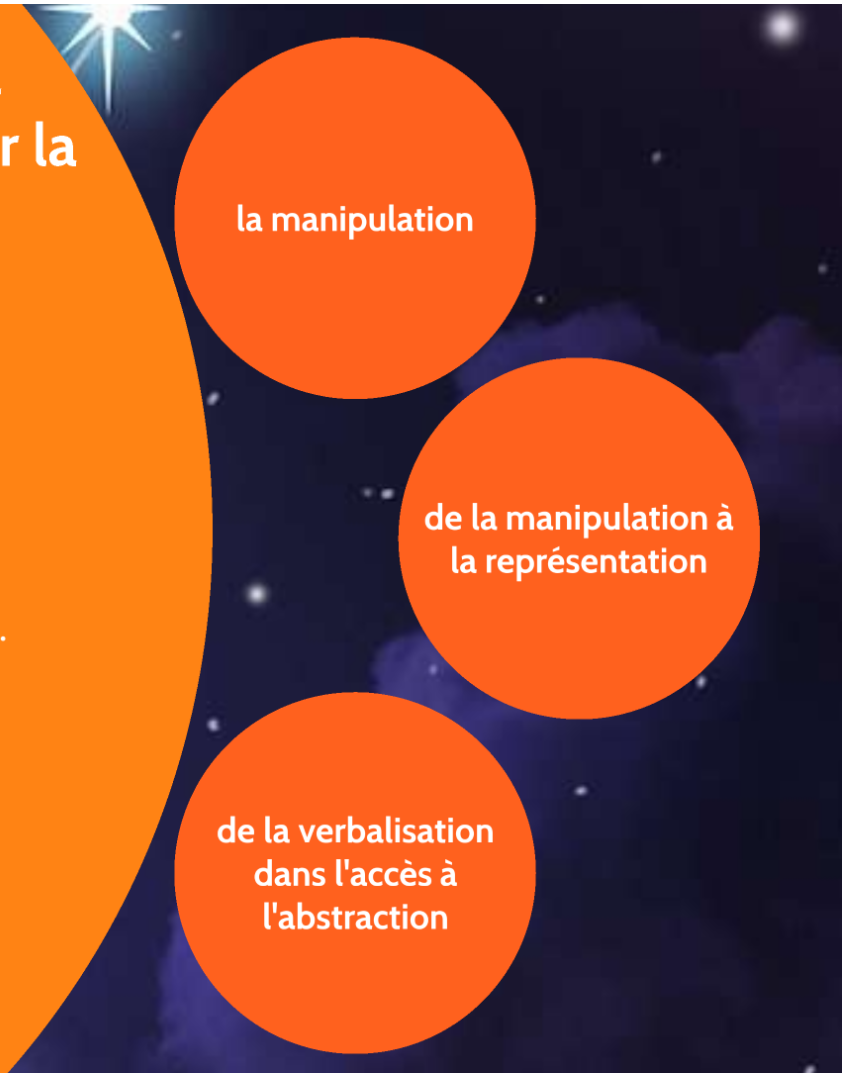
La verbalisation permet au professeur de prendre de l'information et de proposer un étayage adapté.

Vers l’abstraction : de la manipulation à la représentation symbolique en passant par la verbalisation

trois étapes concomitantes essentielles,

la manipulation,
la représentation
et la verbalisation,

qui permettent le passage progressif **vers l’abstraction**.



III Résolution de problèmes et modélisation

un **travail structuré et régulier** pour faire acquérir aux élèves les connaissances et les compétences leur permettant de :

— **comprendre** le problème posé ;

— établir une **stratégie** pour le résoudre (en faisant par exemple des **analogies** avec un **modèle** connu, en décomposant ou recomposant le **problème en sous-problèmes**, en s'appuyant éventuellement sur des **outils** auxiliaires, par exemple un **schéma** ou un **tableau**, en faisant des **essais**, en partant de **ce que l'on veut trouver**) ;

— **mettre en œuvre la stratégie** retenue ;

— **revenir sur la solution** et prendre du recul sur leur travail.

Les attendus de fin de CP à propos de la résolution de problèmes

la démarche d'enseignement de la résolution de problèmes

la modélisation pour aider à résoudre des problèmes

continuum didactique au cycle 2 et au cycle 3

Les écrits et l'institutionnalisation

la modélisation pour aider à résoudre des problèmes

Représenter,
traduire par un dessin ou un schéma la situation. Le fait de représenter la situation permet de l'**appréhender** et de favoriser l'**entrée dans la résolution**. Certaines représentations ne sont pas traduisibles par un calcul.

Modéliser,
traduire mathématiquement la situation. La modélisation amène ensuite à la procédure et au calcul ; elle **rend la réalité calculable**. Il s'agit d'un processus qui peut prendre appui sur diverses représentations.

lien avec la numération et le calcul

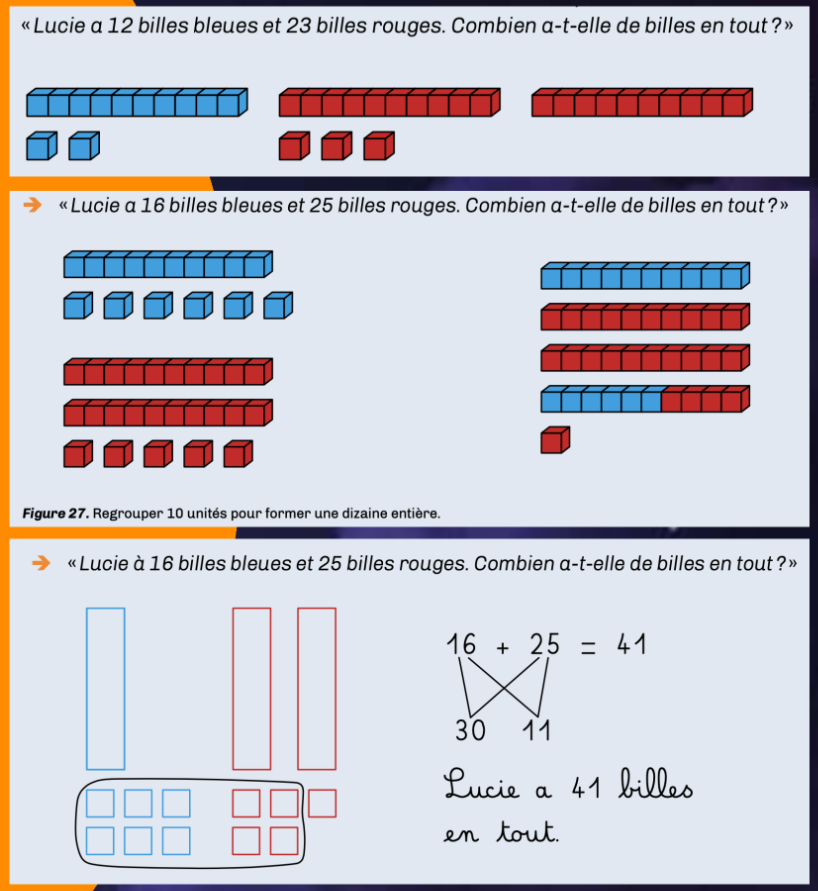
Les problèmes additifs : passer du dessin figuratif au schéma

Les problèmes multiplicatifs

lien avec la numération et le calcul

Travailler des problèmes de type additif est l'occasion de conduire en parallèle un travail sur la numération

remplacer le schéma s'appuyant sur la numération par **un schéma plus abstrait** et plus rapide à réaliser, s'appuyant sur la **numération chiffrée** et le modèle en **barres**



la modélisation pour aider à résoudre des problèmes

Représenter,
traduire par un dessin ou un schéma la situation. Le fait de représenter la situation permet de l'**appréhender** et de favoriser l'**entrée dans la résolution**. Certaines représentations ne sont pas traduisibles par un calcul.

Modéliser,
traduire mathématiquement la situation. La modélisation amène ensuite à la procédure et au calcul ; elle **rend la réalité calculable**. Il s'agit d'un processus qui peut prendre appui sur diverses représentations.

lien avec la numération et le calcul

Les problèmes additifs : passer du dessin figuratif au schéma

Les problèmes multiplicatifs

Les problèmes additifs : passer du dessin figuratif au schéma

Les problèmes relevant du champ additif permettent de **travailler le sens** de l'addition et de la soustraction.

Les cubes emboîtables, le matériel multibase, les réglettes sont des éléments intéressants pour convoquer les aspects additifs, les propriétés de décomposition des nombres ou le sens des opérations

➔ *« Léo a 7 billes rouges et 5 billes bleues. Combien Léo a-t-il de billes en tout ? »*

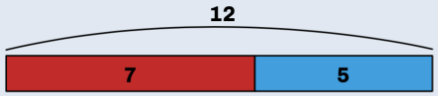
La résolution de ce problème à l'aide de 7 cubes rouges :

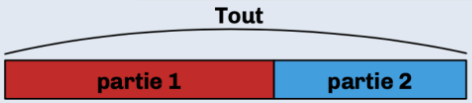
et 5 cubes bleus :

fait apparaître l'assemblage :

puis le schéma :

et enfin le schéma en barres :





1. *Léo et Lucie ont 43 billes à eux deux. Léo a 6 billes. Combien Lucie a-t-elle de billes ?*

2. *Lucie avait 43 billes ce matin. Elle a perdu 6 billes pendant la récréation. Combien a-t-elle de billes maintenant ?*

3. *Lucie avait 43 billes ce matin. Elle a perdu 37 billes pendant la récréation. Combien a-t-elle de billes maintenant ?*

4. *Lucie a gagné 6 billes à la récréation. Maintenant elle a 43 billes. Combien de billes avait-elle avant la récréation ?*

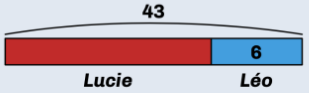


Figure 32. Problème 1.

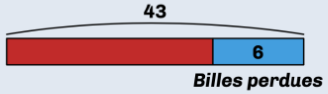


Figure 33. Problème 2.

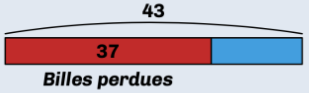


Figure 34. Problème 3.

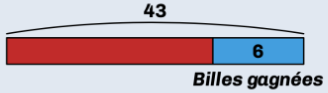


Figure 35. Problème 4.

Ces automatismes additifs installés vont rendre l'introduction de la soustraction naturelle. La soustraction est modélisée par le même schéma que la situation additive, mais pour la recherche d'une partie alors que le tout est connu :

la modélisation pour aider à résoudre des problèmes

Représenter,
traduire par un dessin ou un schéma la situation. Le fait de représenter la situation permet de l'**appréhender** et de favoriser l'**entrée dans la résolution**. Certaines représentations ne sont pas traduisibles par un calcul.

Modéliser,
traduire mathématiquement la situation. La modélisation amène ensuite à la procédure et au calcul ; elle **rend la réalité calculable**. Il s'agit d'un processus qui peut prendre appui sur diverses représentations.

lien avec la numération et le calcul

Les problèmes additifs : passer du dessin figuratif au schéma

Les problèmes multiplicatifs

Les problèmes multiplicatifs

Les problèmes du champ multiplicatif du CP reposent sur **des valeurs numériques adaptées aux procédures des élèves** : matériel tangible, représentation imagée, modélisation, calcul (addition itérée, par exemple).

Ces problèmes permettent de construire le **sens** de la **multiplication** et de la **division**.

Ils correspondent aux situations (de parts égales) où on cherche :
- **le tout** (multiplication),
- **la valeur d'une part** (partage/partition),
- **le nombre de parts** (quotition).

Exemple : « *Paul apporte 3 paquets de biscuits. Il y a 7 biscuits dans chaque paquet. Combien y a-t-il de biscuits en tout ?* »

En réunissant les cubes dans des barres de 7, le professeur peut proposer le schéma en barres suivant qui permet de voir 3 fois 7 :

« **symétrie** » entre les problèmes **multiplicatifs** et les situations de **partage**.

Les problèmes de quotition (recherche du nombre de parts) sont souvent plus difficiles à résoudre que les problèmes de partage (recherche de la valeur d'une part).

Un des objectifs importants pour le cycle 2 est de **faire comprendre le lien entre ces deux types de problèmes qui relèvent de la même opération**.

la modélisation pour aider à résoudre des problèmes

Représenter,
traduire par un dessin ou un schéma la situation. Le fait de représenter la situation permet de l'**appréhender** et de favoriser l'**entrée dans la résolution**. Certaines représentations ne sont pas traduisibles par un calcul.

Modéliser,
traduire mathématiquement la situation. La modélisation amène ensuite à la procédure et au calcul ; elle **rend la réalité calculable**. Il s'agit d'un processus qui peut prendre appui sur diverses représentations.

lien avec la numération et le calcul

Les problèmes additifs : passer du dessin figuratif au schéma

Les problèmes multiplicatifs

III Résolution de problèmes et modélisation

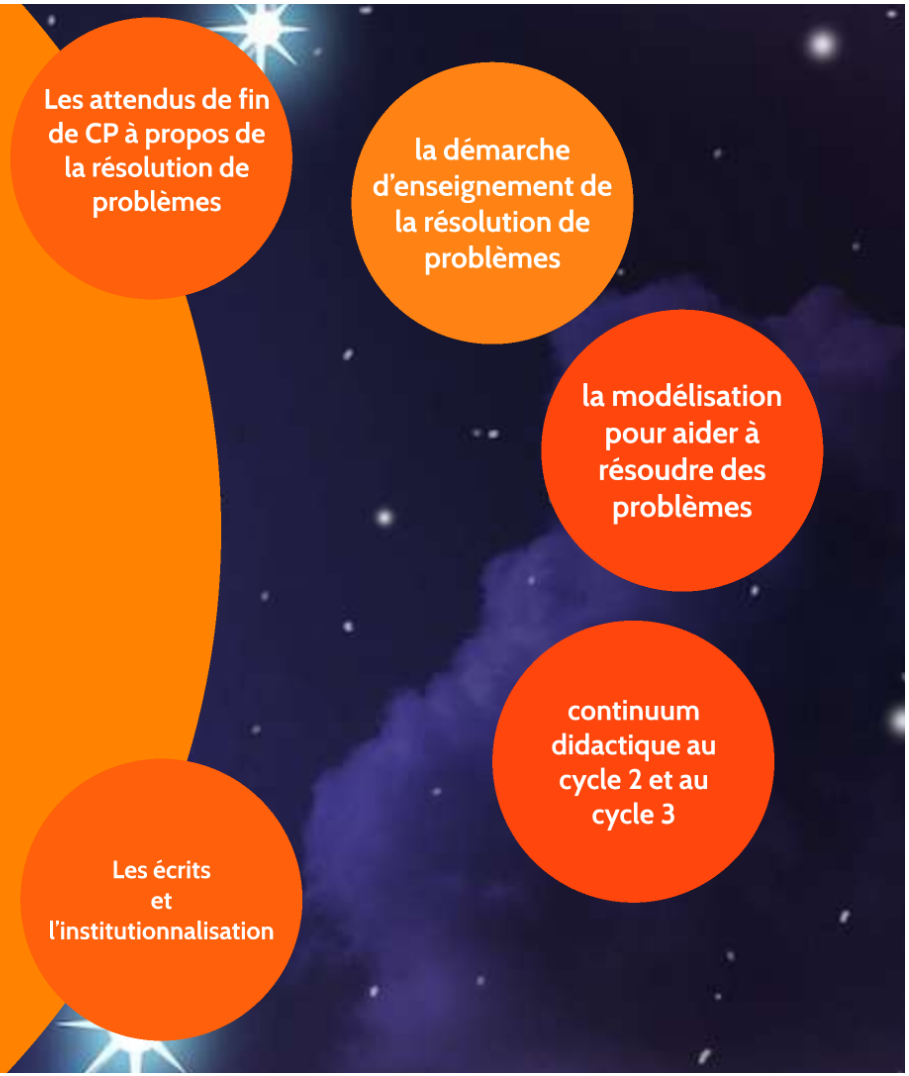
un **travail structuré et régulier** pour faire acquérir aux élèves les connaissances et les compétences leur permettant de :

— **comprendre** le problème posé ;

— établir une **stratégie** pour le résoudre (en faisant par exemple des **analogies** avec un **modèle** connu, en décomposant ou recomposant le **problème en sous-problèmes**, en s'appuyant éventuellement sur des **outils** auxiliaires, par exemple un **schéma** ou un **tableau**, en faisant des **essais**, en partant de **ce que l'on veut trouver**) ;

— **mettre en œuvre la stratégie** retenue ;

— **revenir sur la solution** et prendre du recul sur leur travail.



continuum didactique au cycle 2 et au cycle 3

la « symétrie » entre les opérations

la comparaison

des problèmes complexes

l'introduction ultérieure de la fraction

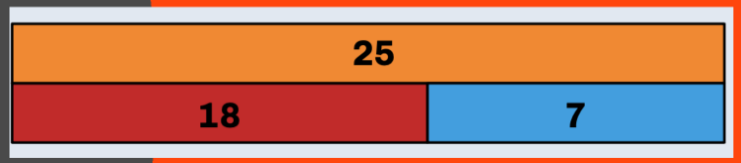
conduire, **année après année**, et dès le plus jeune âge, un travail structuré et régulier.

CP | CE1 | CE2 | CM1 | CM2 | 6e

Le sens des opérations et la « symétrie » entre les opérations

faire acquérir la compréhension de la **symétrie entre addition et soustraction** d'un point de vue abstrait des relations arithmétiques entre les nombres

permettre une meilleure compréhension du sens des opérations
renforcer la compréhension des relations numériques et des automatismes de calcul liés aux décompositions des nombres.



« 25 – 7 = 18 »
« 25 – 18 = 7 »
découlent – par définition même – de la relation additive entre ces 3 nombres:
« 18+7=25 ».

continuum didactique au cycle 2 et au cycle 3

la « symétrie » entre les opérations

la comparaison

des problèmes complexes

l'introduction ultérieure de la fraction

conduire, **année après année**, et dès le plus jeune âge, un travail structuré et régulier.

CP | CE1 | CE2 | CM1 | CM2 | 6e

Lien avec la comparaison

Les problèmes de comparaison sont plus difficiles : formulations spécifiques **« de plus »** et **« de moins »** source de difficultés pour les élèves.

« Lucie a 37 billes. Léo a 6 billes de plus que Lucie. Combien de billes a Léo ? »

répondre avant toute chose à une question du type « qui est le plus grand, qui en en a le plus »

représenter **la grande quantité,**

matérialiser éventuellement **la différence**

et se ramener par la suite à des problèmes de **parties-tout**

continuum didactique au cycle 2 et au cycle 3

la « symétrie » entre les opérations

la comparaison

des problèmes complexes

l'introduction ultérieure de la fraction

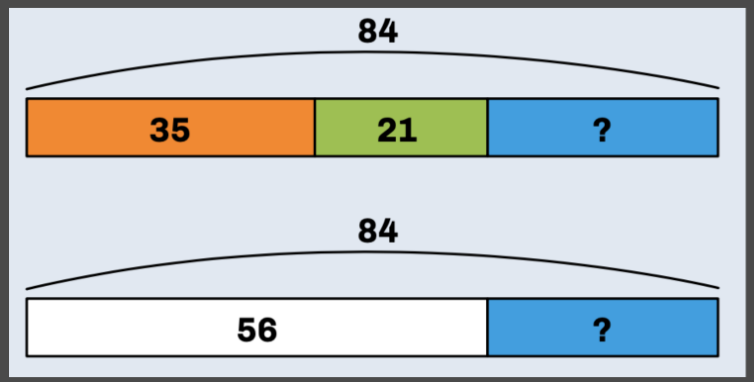
conduire, **année après année**, et dès le plus jeune âge, un travail structuré et régulier.

CP | CE1 | CE2 | CM1 | CM2 | 6e

Résoudre des problèmes complexes

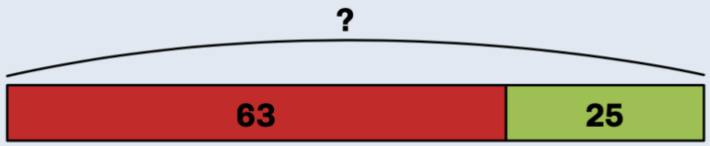
résoudre des problèmes à deux étapes en les ramenant **explicitement et visuellement** à des problèmes en une étape.

« Dans la bibliothèque de la classe, il y a 84 livres. Il y a 35 albums, 21 bandes dessinées. Les autres sont des livres documentaires. Combien y-a-t-il de livres documentaires ? »

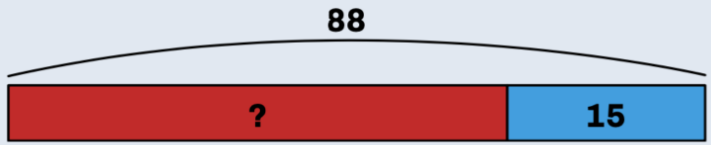


« Dans la bibliothèque de la classe, il y a 63 livres. Le professeur en apporte 25 de plus. Les élèves en empruntent 15. Combien y a-t-il alors de livres dans la bibliothèque de la classe ? »

- **Étape 1** : 25 livres de plus dans la bibliothèque



- **Étape 2** : on emprunte 15 livres



continuum didactique au cycle 2 et au cycle 3

la « symétrie » entre les opérations

la comparaison

des problèmes complexes

l'introduction ultérieure de la fraction

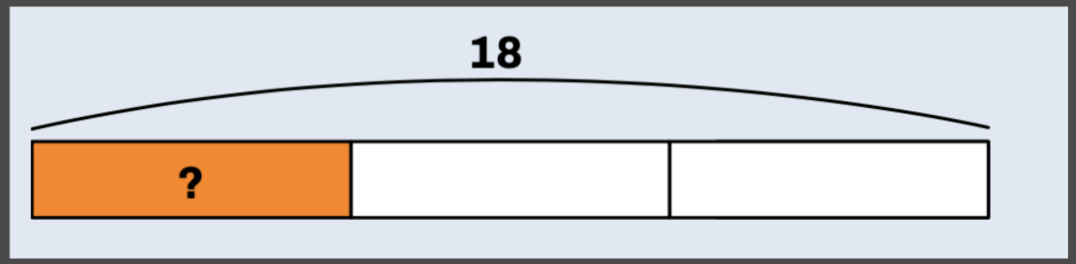
conduire, **année après année**, et dès le plus jeune âge, un travail structuré et régulier.

CP | CE1 | CE2 | CM1 | CM2 | 6e

Lien avec l'introduction ultérieure de la fraction

« 3 enfants se partagent 18 images [donner ces images]. Combien d'images aura chaque enfant ? » (CP)

« Paul a 18 billes. Il en donne un tiers à Julie. Combien de billes Julie reçoit-elle ? » (Cycle 3)



« Construis un rectangle et colorie un tiers du rectangle ».

continuum didactique au cycle 2 et au cycle 3

la « symétrie » entre les opérations

la comparaison

des problèmes complexes

l'introduction ultérieure de la fraction

conduire, **année après année**, et dès le plus jeune âge, un travail structuré et régulier.

CP | CE1 | CE2 | CM1 | CM2 | 6e

III Résolution de problèmes et modélisation

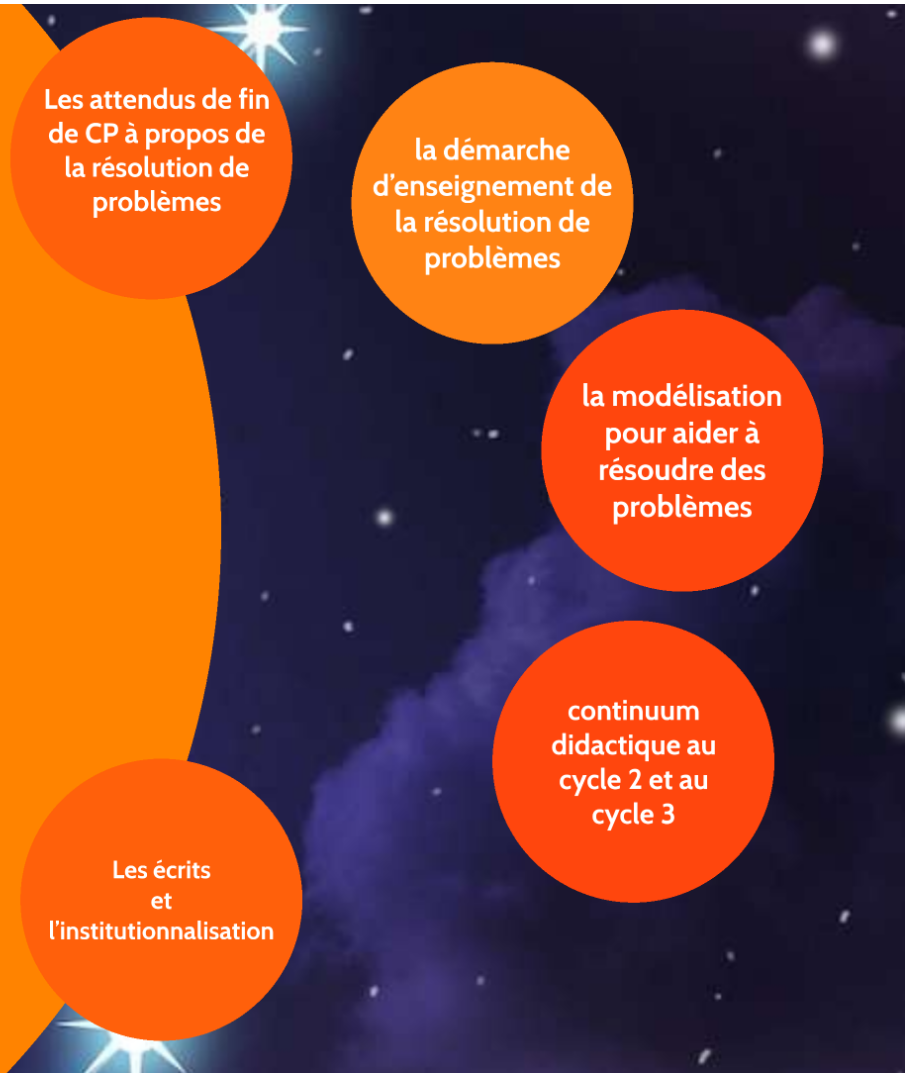
un **travail structuré et régulier** pour faire acquérir aux élèves les connaissances et les compétences leur permettant de :

— **comprendre** le problème posé ;

— établir une **stratégie** pour le résoudre (en faisant par exemple des **analogies** avec un **modèle** connu, en décomposant ou recomposant le **problème en sous-problèmes**, en s'appuyant éventuellement sur des **outils** auxiliaires, par exemple un **schéma** ou un **tableau**, en faisant des **essais**, en partant de **ce que l'on veut trouver**) ;

— **mettre en œuvre la stratégie** retenue ;

— **revenir sur la solution** et prendre du recul sur leur travail.



Les écrits en résolution de problèmes et l'importance de l'institutionnalisation

Les supports des élèves

CAHIER PERSONNEL

conserver la trace des résolutions avec ses essais-erreurs, ses procédures, ses modes de représentation.
une mémoire des problèmes rencontrés.

Il facilite la conduite d'entretiens avec l'élève, pour l'aider à verbaliser, à prendre conscience de ses progrès et notamment à se situer par rapport à ce qui est attendu.

CAHIER DE RÉFÉRENCE EN MATHÉMATIQUES

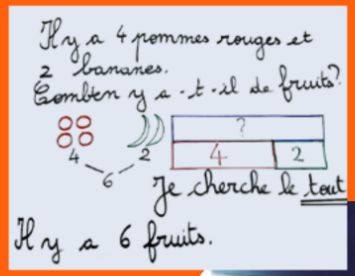
support complémentaire et indispensable pour structurer un enseignement explicite de la résolution de problèmes.
les **écrits formalisés** par le professeur avec les élèves lors de la phase d'institutionnalisation.
Ces écrits constituent **les traces des savoirs** et des compétences travaillés.

OUTILS COLLECTIFS

L'affiche un écrit de référence du vécu commun de la classe :

met en lumière les é**tapes de la résolution** de problèmes :

de l'énoncé en langage naturel, à la **modélisation** en **langage mathématique** en passant par des **représentations schématiques**



Le rôle essentiel de l'institutionnalisation

— **mises en commun** menées durant la séance pour garantir l'engagement et la compréhension de tous les élèves.
— i**nstitutionnalisation finale** renvoie aux problèmes travaillés et aux stratégies développées à l'issue d'une séquence d'apprentissage.
structurer la trace d'un savoir partagé.

modèles dont les élèves pourront s'inspirer pour leurs propres travaux. Ces exemples-types doivent servir de **références systématique**s lors des résolutions de problèmes ultérieures (« c'est comme… »).

Idéalement, ces références seront **communes à l'école**, voire au réseau d'écoles, pour permettre de les utiliser pendant plusieurs années

III

Résolution de problèmes et modélisation

un **travail structuré et régulier** pour faire acquérir aux élèves les connaissances et les compétences leur permettant de :

— **comprendre** le problème posé ;

— établir une **stratégie** pour le résoudre (en faisant par exemple des **analogies** avec un **modèle** connu, en décomposant ou recomposant le **problème en sous-problèmes**, en s'appuyant éventuellement sur des **outils** auxiliaires, par exemple un **schéma** ou un **tableau**, en faisant des **essais**, en partant de **ce que l'on veut trouver**) ;

— **mettre en œuvre la stratégie** retenue ;

— **revenir sur la solution** et prendre du recul sur leur travail.

Les attendus de fin de CP à propos de la résolution de problèmes

la démarche d'enseignement de la résolution de problèmes

la modélisation pour aider à résoudre des problèmes

continuum didactique au cycle 2 et au cycle 3

Les écrits et l'institutionnalisation

Pour enseigner ...

Le guide CP

http://ien-epinay.circo.ac-creteil.fr/spip.php?page=article&id_article=1325

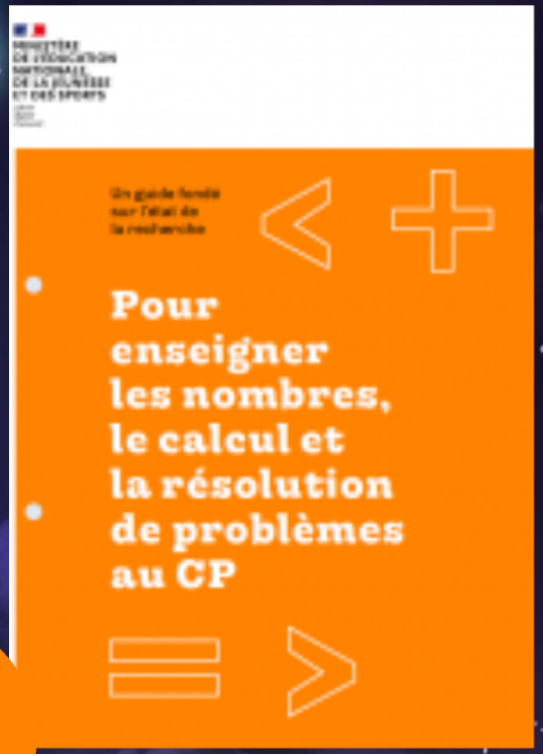
III

Résolution de problèmes et modélisation

les programmes placent « **la résolution de problèmes au centre de l'activité mathématique des élèves** » et précisent que « les problèmes permettent d'aborder de nouvelles notions, de consolider des acquisitions, de provoquer des questionnements ».

mettre en place un enseignement construit pour développer l'aptitude des élèves à résoudre des problèmes.

en résumé



IEN Epinay - 2020 - JCR

En résumé

III Résolution de problèmes et modélisation

- Il s'agit **d'enseigner la résolution de problèmes**. L'enseignement explicite de la résolution de problèmes s'appuiera sur des temps d'institutionnalisation guidés par le professeur qui permettront de hiérarchiser les procédures en prenant en compte leur efficacité et leur économie. **L'objectif n'est cependant pas d'enseigner une typologie de problèmes.**

- L'enjeu est de permettre aux élèves de réussir **seuls** les problèmes arithmétiques relevant du CP en enrichissant la mémoire des problèmes de chacun [49]. Le temps consacré à la résolution des problèmes basiques doit donc être conséquent et régulier. Il importe aussi de proposer des problèmes à deux étapes (problèmes complexes).

- Le triptyque « **manipuler, verbaliser, abstraire** » offre des repères pour concevoir l'enseignement de la résolution de problèmes. L'articulation entre matériel, représentations associées et les notions mathématiques convoquées est essentielle. Il convient donc à ce titre de privilégier dès le CP des matériels décontextualisés tels que les cubes emboîtables.

- Articuler représentation et modélisation : l'appui dès le CP sur des représentations à l'aide de schémas (notamment des schémas en barres) pourra faciliter l'accès à la modélisation et préparer un continuum didactique du cycle 2 au cycle 3 pour l'enseignement de la résolution de problèmes.

Pour enseigner ...

Le guide CP

http://ien-epinay.circo.ac-creteil.fr/spip.php?page=article&id_article=1325

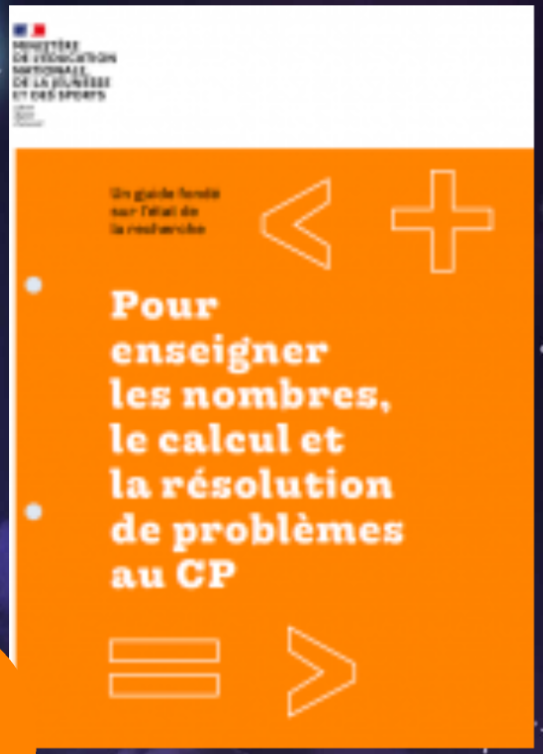
III

Résolution de problèmes et modélisation

les programmes placent « **la résolution de problèmes au centre de l'activité mathématique des élèves** » et précisent que « les problèmes permettent d'aborder de nouvelles notions, de consolider des acquisitions, de provoquer des questionnements ».

mettre en place un enseignement construit pour développer l'aptitude des élèves à résoudre des problèmes.

en résumé



IEN Epinay - 2020 - JCR